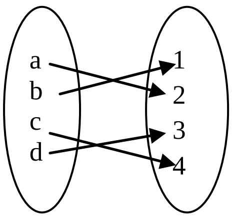
Profesor Istrati Ala
Colegiul Agricol ”Traian Săvulescu”

Matematica M2-clasa a IX-a
Noțiunea de funcție. Elemente ale funcției.
Exerciții și probleme propuse

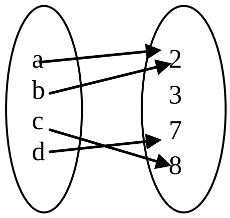
Exersare

1. Care dintre următoarele diagrame definesc o funcție $f:A\to B$?

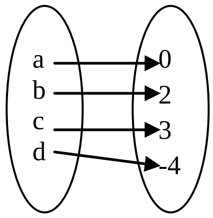
a)



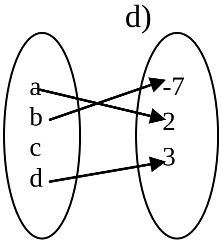
b)



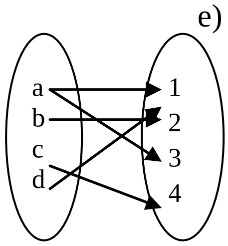
c)



d)



e)



2. Care din următoarele tabele definesc o funcție? În cazurile afirmative , scrieți imaginile funcțiilor respective și imaginea elementului n.

a)

x	m	n	p	q	r
f(x)	1	-2	0	1	2022

b)

x	m	n	p	q	r
g(x)	-3	10	-10	4	5

c)

x	m	n	p	q	r
h (x)	-1	4		0	-7

d)

x	m	n	p	q	r

e (x)	2	-2	-2	-2	0

3. Să se precizeze dacă următoarele relații definesc funcții:

a) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(x)=x+3$

b) $f:\{2;3;5;7\}\to\{1;3;7;11\},\ f(x)=2x-3$

c) $f:\{-3;-5;-7\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=-x$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$

e) $f:\{-4;-1;0;3\}\to\mathbb{N},\ f(x)=|x|-3$

4. Completați în scrierile următoare domeniul de definiție, astfel încât următoarele corespondențe să fie funcții:

a) $f:\ldots\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+2}$

b) $f:\ldots\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3}{x-4}$

c) $f:\ldots\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x(x-1)}$

d) $f:\ldots\to\{-2;-1;0;2\},\ f(x)=\dfrac{x}{3}+2$

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)(x+2)$. Să se calculeze valorile funcției f în punctele

$x=-4;\quad x=0,(3);\quad x=\sqrt{2}+1;\quad x=-\dfrac{2}{5}$.

6. Fie funcția $f:\{-4;-3;-2;0;1;4;6\}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+1$.

a) Scrieți elementele mulțimii $\operatorname{Im} f$;

b) Scrieți elementele graficului funcției, G_f;

c) Aflați imaginile mulțimilor $M=\{1;4;6\},\ N=\{-3;-2;0;4\}$;

d) Aflați preimaginile mulțimii $E=\{-17;-2;1\}$.

7. Arătați că funcțiile *f* și *g* sunt egale, unde: $f:\{-1;0;1\}\to\{1;3;5\},\ f(x)=3-2x$ și

$g:\{-1;0;1\}\to\{1;3;5\},\ g(x)=-\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$.

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1\\ x^2-x-6, & x\ge 1\end{cases}$.

a) Aflați imaginile numerelor: $-2;\ 0;\ 1;\ \dfrac{7}{5};\ -\dfrac{1}{2};\ \sqrt{3};\ -\sqrt{2}.$

b) Să se calculeze $P=f(-1)\cdot f(0)\cdot\ldots\cdot f(5)$.

9. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\in(-\infty;-2)\\ -3, & x\in[-2;1)\\ x^2-5, & x\in[1;+\infty)\end{cases}$. Să se calculeze suma

$S=\left[f(-2)+3\left(f(-3)-f(2)\right)\right]+\left(f(-1)-f\left(-\dfrac{7}{3}\right)\right)^2+f\left(\sqrt{5}\right)-2f(0)$.

10. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2mx+m-3.$

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(1)=0$;

b) Pentru $m=-1$, să se calculeze $f\left(f(-2)\right)$.

c) Pentru $m=2$, să se calculeze suma $S=f(-3)+f(-2)+\ldots+f(5)$.

11. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2022}+x-m$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, dacă $A(1;-3)\in G_f$.

12. Dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x-3$, să se determine coordonatele unui punct de pe graficul funcției f care are:

a) abscisa egală cu ordonata;

b) ordonata egală cu dublul abscisei;

c) abscisa, soluție a ecuației $f(x)+f(x-2)=-6$.

Aprofundare

13. Se consideră funcția $f:[-2;5]\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1$. Determinați $\operatorname{Im} f$.

14. Fie funcția $f:[-1;3]\to R,\ f(x)=3-4x$. Stabiliți care dintre următoarele puncte sunt coliniare:

a) $A(0;3),\ B(-1;7),\ C(2;-5)$;

b) $A(0;5),\ B(1;-1),\ C(-2;-1)$.

15. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m-3)x+3m-2$. Scrieți legea de corespondență în fiecare din cazurile:

a) $A(3;-5)\in G_f$;

b) imaginea lui 1 prin funcția *f* să fie $m-2$;

c) preimaginea lui 8 prin funcția *f* să fie -2.

16. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-ax+b$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-bx+a$. Determinați *a* și *b*, astfel încât graficul funcției *f* se intersectează cu graficul funcției *g* în $A\left(-2;\frac{1}{2}\right)$. Sunt cele două funcții egale?

17. Aflați $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, astfel încât funcția $f:[a+1;3]\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+3c$ și funcția $g:[-3;2b-1]\to\mathbb{R},\ g(x)=(d-5)x-6$ să fie egale.

18. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(3x-4)=x+1$. Să se determine $f(8)$ și $f(-7)$.

19. Fie funcția $f:[-2;5]\to\mathbb{R},\ f(x)=5-2x$. Să se determine diferența dintre valoarea maximă și valoarea minimă a funcției *f*.

20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x-2$. Să se calculeze $E=f\left(\sqrt{2}\right)\cdot f\left(\sqrt{3}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\sqrt{10}\right)$.

Indicații și răspunsuri:

1. a), b), c).
2. a), b), d). $\operatorname{Im} f=\{-2;0;1;2022\},\ n=-2$; $\operatorname{Im} g=\{-10;-3;4;5;10\},\ n=10$; $\operatorname{Im} e=\{-2;0;2\},\ n=-2$.
3. a) Da; b) Da; c) Da; d) Nu; e) Nu.
4. a) $[-2;+\infty)$; b) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; c) $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$; d) $\{-12;-9;-6;0\}$.
5. $f(-4)=10;\ f\left(0,(3)\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{14}{9};\ f\left(\sqrt{2}+1\right)=2+3\sqrt{2};\ f\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{56}{25}$.

6. a) $\operatorname{Im} f=\{-17;-11;-2;1;7;10;13\}$; b) $G_f=\{(-4;13),(-3;10),(-2;7),(0;1),(1;-2),(4;-11),(6;-17)\}$ c) $\operatorname{Im} M=\{-2;-11;-17\}$; $\operatorname{Im} N=\{10;7;1;-11\}$ d) Preimaginile mulțimii E sunt $\{6;7;-2\}$

7. $f(-1)=g(-1);\ f(0)=g(0);\ f(1)=g(1)$

8. a) $f(-2)=-3;\ f(0)=-1;\ f(1)=-6;\ f\left(\frac{7}{5}\right)=-\frac{136}{25};\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2};\ f\left(\sqrt{3}\right)=-3-\sqrt{3};$ $f\left(-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}-1$

b) $f(3)=0\Rightarrow P=0$

9. $S=-9$

10. a) $f(1)=3m-3\Rightarrow 3m-3=0\Rightarrow m=1$; b) Dacă $m=-1\Rightarrow f(x)=-2x-4$, atunci $f(f(-2))=-4$.

c) Dacă $m=2\Rightarrow f(x)=4x-1$ și $f(-3); f(-2);\ldots f(5)$ sunt termeni ai unei progresii aritmetice cu rația $r=4\Rightarrow S_9=\frac{(-13+19)\cdot 9}{2}=27$.

11. $f(1)=-3\Rightarrow m=5$

12. a) $x=y\Rightarrow 5x-3=x\Rightarrow x=\frac{3}{4}\Rightarrow\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$; b) $y=2x\Rightarrow 5x-3=2x\Rightarrow x=1\Rightarrow(1;2)$; c) Soluția ecuației este $x=1\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow(1;2)$.

13. $-2\le x\le 5\Rightarrow -6\le 3x\le 15\Rightarrow -7\le 3x-1\le 14\Rightarrow \operatorname{Im} f=[-7;14]$

14. a) $f(0)=3\Rightarrow A\in G_f;\ f(-1)=7\Rightarrow B\in G_f;\ f(2)=-5\Rightarrow C\in G_f\ \Rightarrow A,B,C$ -coliniare;

b) $f(0)=3\ne 5\Rightarrow A\notin G_f;\ f(1)=-1\Rightarrow B\in G_f;\ f(-2)=11\ne -1\Rightarrow C\notin G_f\ \Rightarrow A,B,C$ - nu sunt coliniare.

15. a) $f(3)=-5\Rightarrow f(3)=6m-11\Rightarrow m=1\Rightarrow f(x)=-2x+1$;

b) $f(1)=m-2\Rightarrow m=1\Rightarrow f(x)=-2x+1$ c) $f(-2)=8\Rightarrow m=4\Rightarrow f(x)=x+10$

16.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=2a+b \\ f(-2)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow 2a+b=\frac{1}{2};\ \left.\begin{array}{l} g(-2)=2b+a \\ g(-2)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow 2b+a=\frac{1}{2};\Rightarrow\begin{cases}2a+b=\frac{1}{2}\,|\cdot 2\\ 2b+a=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+2b=1\\ a+2b=\frac{1}{2}\,|\cdot(-1)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a+2b=1\\ -a-2b=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{6}\\ b=\frac{1}{6}\end{cases}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6},\ g(x)=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}.$$

17. $a+1=-3\Rightarrow a=-4;\ 2b-1=3\Rightarrow b=2;\ 3c=-6\Rightarrow c=-2;\ d-5=-1\Rightarrow d=4$.

18. $3x-4=8\Rightarrow x=4\Rightarrow f(8)=5;\ 3x-4=-7\Rightarrow x=-1\Rightarrow f(-7)=0$.

19. $-2\le x\le 5\,|\cdot(-2)\Rightarrow -10\le -2x\le 4\,|+5\Rightarrow -5\le 5-2x\le 9\Rightarrow \operatorname{Im} f=[-5;9]\Rightarrow f_{\min}=-5,\ f_{\max}=9$

$9-(-5)=14$

20. $f\left(\sqrt{4}\right)=0\Rightarrow E=0$