Profesor Istrati Ala
Colegiul Agricol ”Traian Săvulescu”

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E.c)
Matematică M_tehnologic

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_4=-4$ și $a_8=12$.

(5p) 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $2x^2-4x-1=0$. Arătați că $x_1+x_2+4x_1x_2=0$.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{3x-4}=2$.

(5p) 4. Să se determine probabilitatea că alegând unul din numerele $A_5^3, C_6^2, 4!$ acesta să fie divizibil cu 4.

(5p) 5. În reperul cartezian xOy seconsideră punctele $A(4;3), B(6;7), C(7;4)$. Să se calculeze distanța de la punctul C la mijlocul segmentului $[AB]$.

(5p) 6. Să se calculeze tgx, știind că $\sin x=\frac{4}{5}$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=xA-I_2$.

(5p) a) Arătați că $\det(B(2))=3$.

(5p) b) Demonstrați că matricea $C=A\cdot A-B(1)$ este inversabilă.

(5p) c) Determinați numerele naturale n pentru care $\det(B(n))\geq 3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{2x+y}{3}-2xy+1$.

(5p) a) Arătați că $(-1)*2=5$.

(5p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=1$.

(5p) c) Demonstrați că $x*(-2x)\geq 0,$ pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(2x-1)^2-4\ln x$.

(5p) a) Arătați că $f'(x)=\frac{4(x-1)(2x+1)}{x}$.

(5p) b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x}$.

(5p) c) Demonstrați că $1+4\ln x\leq(2x-1)^2$, pentru orice $x\in(0;\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+x-2e^x$.

(5p) a) Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x+2e^x\right)dx=2$

(5p) b) Calculați $\int_{1}^{e}\left(2e^x-3x^2+f(x)\right)\ln x\,dx$

(5p) c) Determinați numărul real $a, a>0$, știind că $\int_{0}^{1}f(x)dx=a^2+\frac{3}{2}-2e$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Subiectul I (30 puncte)

1.	$a_8 = a_4 + 4r$ $12 = -4 + 4r$ $4r = 16 \Rightarrow r = 4$	2p 3p
2.	Aplicând relațiile lui Viète $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ $2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - 2 = 0$	2p 3p
3.	$\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^3 = 2^3$ $3x - 4 = 8 \Rightarrow x = 4$	2p 3p
4.	Sunt 3 cazuri posibile $A_5^3 = 60, C_6^2 = 15, 4! = 24$, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile} = \frac{2}{3}$	1p 2p 2p
5.	$x_M = 5, \quad y_M = 5$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB $MC = \sqrt{(5-7)^2 + (5-4)^2}$ $MC = \sqrt{5}$	2p 2p 1p
6.	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ Cum $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, obținem $\cos x = -\frac{3}{5}$ $tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{4}{3}$	2p 1p 2p

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1.a)	$B(2) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ $\det(B(2)) = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(-3) - 6 \cdot 2 = 15 - 12 = 3$	2p 3p
b)	$B(1) = A - I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$ $C = A \cdot A - B(1) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}, \quad \det(C) = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -12 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow$ C-inversabilă.	2p 3p
c)	$B(n) = nA - I_2 = \begin{pmatrix} -2n-1 & n \\ 3n & -n-1 \end{pmatrix}$ $\det(B(n)) = -n^2 + 3n + 1, \quad -n^2 + 3n - 2 \geq 0$	1p 2p

	$n\in[1;2],\ n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\in\{1;2\}$	2p
2.a)	$(-1)*2=\frac{-2+2}{3}-2\cdot(-1)\cdot 2+1=$ $=0+4+1=5$	3p 2p
b)	$x*x=\frac{2x+x}{3}-2x^2+1=-2x^2+x+1$ $-2x^2+x+1=1\Rightarrow x(1-2x)=0\Rightarrow x_1=0$ sau $x_2=\frac{1}{2}$.	2p 3p
c)	$x*(-2x)=\frac{2x-2x}{3}-2\cdot x\cdot(-2x)+1=$ $=4x^2+1\geq 0$, pentru orice număr real x.	2p 3p

Subiectul al III-lea (30 puncte)

1.a)	$f'(x)=8x-4-\frac{4}{x}=$ $=\frac{8x^2-4x-4}{x}=\frac{4(x-1)(2x+1)}{x}$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x-1)(2x+1)}{x}\cdot\frac{1}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-4x-4}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(8-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2}=8$	2p 3p
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2}\notin(0;\infty)$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(0;1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0;1]$, $f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[1;+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1;+\infty)$. $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)\geq 1$ pentru orice $x\in(0;+\infty)\Rightarrow(2x-1)^2-4\ln x\geq 1\Rightarrow\ (2x-1)^2\geq 1+4\ln x$	3p 2p
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x+2e^x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(3x^2+x-2e^x-x+2e^x\right)dx=\int_{-1}^{1}3x^2dx=$ $=3\cdot\frac{x^3}{3}\Big\vert_{-1}^{1}=x^3\Big\vert_{-1}^{1}=1^3-(-1)^3=2$	2p 3p
b)	$\int_{1}^{e}\left(2e^x-3x^2+f(x)\right)\ln x\,dx=\int_{1}^{e}\left(2e^x-3x^2+3x^2+x-2e^x\right)\ln x\,dx=\int_{1}^{e}x\ln x\,dx=$ $=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\frac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=\frac{e^2+1}{4}$	2p 3p
c)	$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}\left(3x^2+x-2e^x\right)dx=\left(x^3+\frac{x^2}{2}-2e^x\right)\Big\vert_0^1=\frac{7}{2}-2e$ $\frac{7}{2}-2e=a^2+\frac{3}{2}-2e\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{2}$. Deoarece $a>0\Rightarrow a=\sqrt{2}$	2p 3p